Έτσι, f μετρήσιμη αν.ν $[f=\beta]\in\mathcal{A}$, $\forall\beta\in\mathbb{R}$.

Πρόταση

Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $f: X\to[-\infty,+\infty]$

i) αν η f είναι μετρήσιμη και $C\subset X$ τότε $f/_C$ είναι μετρήσιμη.

ii) αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν $\mathcal{A}$: $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ τότε f μετρήσιμη αν.ν $f/_{A_n}$ μετρήσιμη $\forall n\in\mathbb{N}$

Απόδειξη

i) Αν $b\in\mathbb{R}$

$$\left[f/_C\le b\right]=C\cap\underbrace{\left[f\le b\right]}_{\in\mathcal{A}}\in\mathcal{A}_C$$

Άρα, $f/_C$ μετρήσιμη

ii) $(\Rightarrow)$: Από το (i) άμεσα

$(\Leftarrow)$: Για κάθε $b\in\mathbb{R}$

$$[f\le b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap[f\le b])=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f/A_n\le b]\in\mathcal{A}$$

αφού $[f/A_n\le b]\in\mathcal{A}$ διότι $A_n\in\mathcal{A}$ και f μετρήσιμη για κάθε $n\in\mathbb{N}$

Πρόταση

Έστω X μετρικός χώρος και $Y\subset X$

Τότε i) $\mathcal{B}(X)\cap Y(=\mathcal{B}(X)_Y)=\mathcal{B}(Y)$

ii) αν $f: X\to[-\infty,+\infty]$ είναι Borel μετρήσιμη τότε f/Y είναι Borel μετρήσιμη

(Χωρίς Απόδειξη).

Για τα ακόλουθα πάντα θα έχω ένα $(X,\mathcal{A})$ μ.χ

Πρόταση

Για κάθε συνάρτηση $f: X\to\mathbb{R}$

Τ.Α.Ε.Ι

i) f μετρήσιμη

ii) $[f \in G] = f^{-1}(G) \in \mathcal{A} \quad \forall\, G \subset \mathbb{R}$, G ανοιχτό.
iii) $[f \in F] = f^{-1}(F) \in \mathcal{A} \quad \forall\, F \subset \mathbb{R}$, F κλειστό
iv) $[f \in B] = f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall\, B \subset \mathbb{R}$, B Borel $= \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Απόδειξη

Θέτω $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : [f \in A] \in \mathcal{A}\}$

Η $\mathcal{F}$ προφανώς είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$

(i) ⇔ (i'): $[-\infty, \beta] \in \mathcal{F}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

(ii) ⇔ (ii'): Η $\mathcal{F}$ περιέχει τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$

(iii) ⇔ (iii'): Η $\mathcal{F}$ περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$

(iv) ⇔ (iv'): Η $\mathcal{F}$ περιέχει τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Όμως τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ παράγονται από τα ανοιχτά, τα κλειστά και τα $(-\infty, \beta]$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Άρα, έπεται ότι (i') ⇔ (ii') ⇔ (iii') ⇔ (iv') ⇒

⇒ (i) ⇔ (ii) ⇔ (iii) ⇔ (iv).

Πρόταση

Εάν $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες τότε

i) $[f < g] = \{x \in X : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$
ii) $[f \le g] \in \mathcal{A}$
iii) $[f = g] \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη

i) $$[f<g] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\overbrace{[f<q]}^{\in \mathcal{A}} \cap \overbrace{[q<g]}^{\in \mathcal{A}} \right) \in \mathcal{A}$$

ii) $$[f \le g] = \underbrace{[f > g]}_{\in \mathcal{A}}{}^{c} \in \mathcal{A}$$

iii) $$[f = g] = \underbrace{[f \le g]}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{[f \ge g]}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Πρόταση

Έστωσαν $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις

Τότε:

i) Οι $f \vee g = \max\{f, g\}$ & $f \wedge g = \min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες

ii) Οι $f^+ = \max\{f, 0\}$ & $f^- = \max\{-f, 0\}$ είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη

i) $\forall \beta \in \mathbb{R}$: $[f \vee g \leq \beta] = [f \leq \beta] \cap [g \leq \beta] \in \mathcal{A}$ } $f \vee g$ & $f \wedge g$
$[f \wedge g \leq \beta] = [f \leq \beta] \cup [g \leq \beta] \in \mathcal{A}$ } μετρήσιμες

ii) Άμεσο από το (i) αφού $-f$ μετρήσιμη
και $[-f \leq \beta] = [f \geq -\beta] \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση
Μια συνάρτηση $f = f^+ - f^-$

Πρόταση
Αν $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ $n = 1, 2, \ldots$
ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων
Τότε:
i) $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ μετρήσιμες

ii) $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ μετρήσιμες

iii) Αν $\exists \lim_n f_n$ τότε είναι μετρήσιμη

Απόδειξη

i) $[\sup_n f_n \leq \beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f_n \leq \beta] \in \mathcal{A}$

$[\inf_n f_n < \beta] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n < \beta] \in \mathcal{A}$

(ή $[\inf_n f_n \geq \beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f_n \geq \beta] \in \mathcal{A}$)

ii) $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{i \geq n} f_i \in \mathcal{A}$

$\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{i \geq n} f_i \in \mathcal{A}$

iii) Αν $\exists \lim_n f_n \iff \lim_n f_n = \limsup_n f_n = \liminf_n f_n$

Σχόλιο: Αν $f_n \xrightarrow{\text{σημ.}} f$ τότε f μετρήσιμη.

Ορισμός

Έστω X μετρικός χώρος και $f: X \to \mathbb{R}$

i) Η f λέγεται Baire 1 αν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n: X \to \mathbb{R}$ τ/ω $f = \lim_n f_n$

ii) Η f λέγεται Baire 2 αν υπάρχει ακολουθία Baire 1 συναρτήσεων τ/ω $f = \lim f_n$

πχ

Η $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι Baire 1 και όχι Baire 2

Παρατήρηση

α) Κάθε Baire 1, 2, ... είναι Borel μετρήσιμη

β) Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τότε f' είναι και Baire 1 και άρα Borel μετρήσιμη. Διότι

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} g_n(x) \quad \text{τ/ω} \quad g_n(x) := n\left(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right)$$

συνεχείς συναρτήσεις $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα, f' είναι Baire 1 $\Rightarrow$ f' μετρήσιμη

Πρόταση

Αν $f, g: X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες και $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Τότε

i) αf μετρήσιμη

ii) $f+g$ μετρήσιμη

Απόδειξη

i) Αν $\alpha = 0$, $\alpha f = 0$ μετρήσιμη

Έστω $\alpha > 0$ τότε $\forall \beta \in \mathbb{R}$ $[\alpha f \le \beta] = [f \le \frac{\beta}{\alpha}] \in \mathcal{A}$

ii) $\forall \beta \in \mathbb{R}$: $[f+g < \beta] = [f < \beta - g] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left([f < q] \cap [g < \beta - q]\right) \in \mathcal{A}$

Πρόταση

Αν $f, g: X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $\alpha \in \mathbb{R}$

i) af μετρήσιμη

ii) $f+g$, $f-g$ μετρήσιμες

iii) $f \cdot g$ μετρήσιμη

iv) $\frac{f}{g}$ μετρήσιμη αν $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$

v) $|f|$ μετρήσιμη.

Αποδ.

i) και ii) όπως προηγούμενων με μόνη διαφορά για $a<0$ ισχύει $[af \leq \beta] = [f > \frac{\beta}{a}] \in \mathcal{A}$ και $f-g = f+(-1)g$.

iii) $f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{2} \in \mathcal{A}$ διότι

Άρα, αν f μετρήσιμη $\xRightarrow{\text{οδο}}$ f^2 μετρήσιμη

$$[f^2 < \beta] = \begin{cases} \emptyset, & \beta \leq 0 \\ [f < \sqrt{\beta}] \cup [f > -\sqrt{\beta}], & \beta > 0 \end{cases}$$

άρα $[f^2 < \beta] \in \mathcal{A}$

iv) Έστω $A = [g > 0] \in \mathcal{A}$ και

$\forall \beta \in \mathbb{R}: \quad [\frac{f}{g} \leq \beta] = \{[\frac{f}{g} \leq \beta] \cap A\} \cup \{[\frac{f}{g} \leq \beta] \setminus A\} =$

$= \{[f \leq \beta g] \cap A\} \cup \{[f \geq \beta \cdot g] \setminus A\} \in \mathcal{A}$

v) $|f| = \underset{\geq 0}{f^+} + \underset{\geq 0}{f^-} \in \mathcal{A}$ (από πριν)

Ορισμός

Μια μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται απλή $S: X \to \mathbb{R}$ αν το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο

Η S γράφεται:

$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ και λέγεται κανονική μορφή της S όταν $a_i \neq a_j \ \forall i \neq j$ και $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, n$ και τα σύνολα A_i, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ αποτελούν μία διαμέριση του X, σε μετρήσιμα μη κενά σύνολα

Έτσι, $S(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$ και $A_i = S^{-1}(\{a_i\})$.

Πρόταση (τεχνική απόδειξη)

Έστω $f: X \to [0, +\infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση τότε $\exists\, S_n \uparrow$ ακολουθία απλών θετικών συναρτήσεων των οποίων το όριο $\lim S_n = f$.
(Αν f φραγμένη τότε μπορεί να γίνει τέτοια επιλογή συναρτήσεων ώστε η σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη)

Απόδειξη

Ορίζουμε

$$S_n = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{A_{n,j}} + n\,\chi_{B_n}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

όπου $B_n = [f \geq n] \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$$A_{n,j} = \left[\frac{j-1}{2^n} \leq f \leq \frac{j}{2^n} \right], \; j = 1, 2, \ldots, n2^n, \; n \in \mathbb{N}$$

(S_n) απλή και θετική ή και 0, $S_n \leq f$

Επίσης αν $x \in X$ με $f(x) < n$ $(\Leftrightarrow x \in X \setminus B_n)$

Τότε $0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \ell(A_{n,j}) = \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim S_n = f$:

Σταθεροποιώντας ένα $x \in X$

Αν $f(x) < +\infty$ τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) < n$, $\forall n \geq n_0$
και άρα $0 \leq f(x) - S_n(x) < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq n_0$

Άρα, $\lim S_n(x) = f(x)$

Αν $f(x) = +\infty$ τότε $x \in B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
και άρα $\lim S_n(x) = +\infty = f(x)$

Αν f είναι φραγμένη $\to \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: f(x) < n$, $\forall n \geq n_0$

Άρα, $|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \to 0 \Rightarrow f \leftarrow S_n$ ομοιόμορφα

$S_n \leq S_{n+1}, \forall n$

Παίρνω το $A_{n,j} = A_{n+1, 2j-1} \cup A_{n+1, 2j}$, $j = 1, \ldots, n2^n$

$B_n = B_{n+1} \cup \bigcup_{k = n \cdot 2^{n+1} + 1}^{(n+1)2^{n+1}} A_{n+1, k}$, $\forall n$

Έστω $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$

$x \in A_{n,j}$ $\forall j = 1, \ldots, n2^n$

$$S_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2j-2}{2^{n+1}}, & x \in A_{n+1,2j-1} \\ \dfrac{2j-1}{2^{n+1}}, & x \in A_{n+1,2j} \end{cases} \geq \frac{j-1}{2^n} = S_n(x)$$

Αν $x \in B_n \Rightarrow S_n(x) = n$

$$S_{n+1}(x) = \begin{cases} n+1, & \text{αν } x \in B_{n+1} \\ \dfrac{k-1}{2^{n+1}}, & \text{αν } x \in A_{n+1,k},\ k = n2^{n+1}+1, \dots, (n+1)2^{n+1} \end{cases}$$

οπου $S_{n+1}(x) \geq n = S_n(x)$.

Προτασή

Αν $f: X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη τοτε $\exists (s_n)$ ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $f = \lim s_n$
Αν f φραγμένη η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη

Αποδ

$$f = f^+ - f^-$$

$\exists \sigma_n$ $\exists \tau_n$ οπως στην προηγούμενη πρόταση
θετοντας $s_n = \sigma_n - \tau_n$ τοτε έχουμε το ζητούμενο
Αν επίσης f φραγμένη $\Rightarrow f^+, f^-$ φραγμένες

Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: X \to \mathbb{C}$ λέγεται ($\mathcal{A}$-) μετρήσιμη αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ $(= \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$
Ανάλογα ορίζεται ποτε f μ-μετρήσιμη (μ μετρο στον $(X, \mathcal{A})$) και ποτε f είναι Borel μετρήσιμη (οταν X μετρικός χώρος)

Προτασή

Εστω $f: X \to \mathbb{C}$ και $f = u + iv$, με $u = Re(f)$, $v = Im(f)$
Η f μετρήσιμη ανν u, v μετρήσιμες ($\Leftrightarrow$ u^+, u^-, v^+, v^- μετρησιμες)

Αποδειξη

(⇒) Έστω οταν $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ με

$\pi_1(x+iy) = x$ και $\pi_2(x+iy) = y$

Έτσι, $u = \pi_1 \circ f$ & $V = \pi_2 \circ f$

Για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$

$[u \leq \beta] = u^{-1}((-\infty, \beta]) = f^{-1}(\pi^{-1}(-\infty, \beta]) =$

$= f^{-1}((-\infty, \beta] \times \mathbb{R}) \in \mathcal{A}$

Ομοίως η V είναι μετρήσιμη

(⇐): Έστω I, J ανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$

$f^{-1}(I \times J) = \underbrace{u^{-1}(I)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{V^{-1}(J)}_{\in \mathcal{A}}$.

Όμως αν $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό τότε

$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \times J_n)$ όπου J_n, I_n ανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$

Άρα, $f^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n \times J_n) \in \mathcal{A} \Rightarrow f$ μετρήσιμη

Πρόταση

Αν $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων ώστε $f = \lim f_n \Rightarrow f$ μετρήσιμη

Απόδειξη

$\left.\begin{array}{l} f_n = U(n) + i\,V(n) = U_n + iV_n \\ f = u + iv \end{array}\right\} \to f_n \to f$

άρα $u_n \to u$ αλλά u_n, v_n μετρήσιμες (πρόταση)
$V_n \to V$

άρα v, u μετρήσιμες $\Rightarrow f$ μετρήσιμη

Πρόταση

Έστω $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες, $c \in \mathbb{R}$ τότε cf, $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $g \neq 0$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες

Απόδειξη

$f = u + iv$
$g = w + iz$ $\xrightarrow{\text{Πρόταση}}$ u, v, w, z μετρήσιμες

$f + g = (u+w) + i\,(v+z)$ μετρήσιμη

$f \cdot g = (uw - vz) + i\,(\cancel{z}u + vw)$ μετρήσιμη

$\frac{1}{g} = \frac{1}{w+iz} = \frac{w}{w^2+z^2} + i\left(\frac{-z}{w^2+z^2}\right)$ μετρήσιμη

άρα, $f \cdot \frac{1}{g}$ μετρήσιμη

$|f| = \sqrt{u^2+v^2}$ σύνθεση της συνεχούς $\sqrt{\ }$ με τη μετρήσιμη u^2+v^2